Non-trivial Surjective Endomorphismを持つ3次元代数多様体の構造

藤本, 圭男

代数幾何学シンポジウム記録
1998年度　pp.129-139

Non-trivial Surjective Endomorphismを持つ3次元代数多様体の構造

藤本圭男（岐阜大）（with. 佐藤栄一）

§0. 非特異射影代数多様体Xから自分自身へのmorphism $f: X \longrightarrow X$をendomorphism（以下endと略記），更にfが非定値写像かつ同型写像でない時，fはnon-trivial（非自明）なendと呼ぶ。全射なend $f: X \longrightarrow X$は，有限射となり，かつ$\kappa(X) \geq 0$ならば有限エタール射，更にXが一般型ならば，fは同型写像となる。3次元非特異射影代数多様体Xで$\kappa(X) \geq 0$かつnon-trivial surjective endを許すものの構造を調べる事が目的である。動機の一つとして，次のVan de Ven, Lazarsfeldの問題が在る。

問題　Gを半単純代数群$(/\mathbb{C})$，$P \subset G$をmaximal parabolic subgroupとして，$X := G/P$とおく。（この時，XはFano多様体で$\mathrm{Pic}\,X \cong \mathbb{Z}$）$f: X \to Y$をsmooth variety Yの上への同型でない有限射とすると，$Y \simeq \mathbb{P}^n$か？$(n = \dim X)$

この問題は今だopenであり，いくつかの特別の場合に肯定的に解かれている。（$X \simeq \mathbb{P}^n$の場合は，Lazarsfeld，$X \simeq$ 非特異2次超曲面$(n \geq 3)$の場合は，Cho & Sato， Paranjape，Xが既約なコンパクト．Hermite対称空間の場合は．Tsai，Xがsimpleなアーベル多様体で．fが分岐する場合はDebarreに依る。）又、$X := G/P$が$\mathbb{P}^n$と同型でない限り、非自明なsurjective endを持たない事もParanjapeにより示されている。上のいずれの定理の証明もextremal rational curveの挙動の精密な解析を要する。

同じendに関する問題とはいえ、考えている多様体の小平次元が$-\infty$と非負の場合とでは、様相は大いに異なる。

以下、小平次元が非負の場合を主に扱かう。

Question Xはn次元非特異射影代数多様体で．$0 \leq \kappa(X) < \dim X$かつ、非自明なsurjective end $f: X \longrightarrow X$を持つと仮定する。この時．Xの適当なfinite，étale covering $\widetilde{X} \longrightarrow X$がとれて．$\widetilde{X}$は非特異射影代数多様体$W$ $(0 \leq \dim W < \dim X)$の上のsmoothなAbelian schemeの構造を持つか？

次の結果を得た。

結果 $\dim X = 1$の場合．自明

$\dim X = 2$ 〃 Yes

$\dim X = 3$，$\kappa(X) = 0, 2$の場合．Yes

更にこの時．$\widetilde{X} \simeq W \times A$ $(0 \leq \dim W < \dim X$

Aは正次元のAbelian variety)．$\kappa(W) = \kappa(X)$

と直積に分解する。

<u>注意</u> 上で surjective endomorphism $f: X \longrightarrow X$ を、generically finite な rational map $f: X \dashrightarrow X$ と条件を弱める事はできない。実際、この様な例は、Kummer曲面、global section を持つ勝手な楕円曲面など、いくらでも構成できるからである。

<u>主定理</u> X を、$\kappa(X) \geq 0$ なる3次元非特異射影代数多様体で、非自明な surjective endomorphism $f: X \longrightarrow X$ を持つと仮定する。すると、X の極小モデルは非特異で、X の構造は次のいずれか。

<u>Case 1) $\kappa(X) = 2$ の時</u>、X は高々、商特異点のみを許す正規曲面 T 上の楕円ファイバー空間 $\varphi: X \longrightarrow T$ となり、f は底空間 T の自己同型を引きおこし、$\varphi: X \longrightarrow T$ を保つ。更に ① X は T 上の Seifert ファイバー空間 i.e. φ は equi-dimensional で、特異ファイバーは高々、$m\mathrm{I}_0$-型重複ファイバーだけ、この外側で主ファイバー束。K_X は numerically φ-trivial。

② X の適当な有限 étale covering $\tilde{X}$ は非特異一般型曲面 $\tilde{T}$ と非特異楕円曲線 E との直積に同型。

Case 2) $\kappa(X)=1$ の時、X の極小モデル X' は非特異で、Iitaka fibration $\Phi := \Phi_{|mK_{X'}|} : X' \longrightarrow C$ の一般ファイバーは Abel曲面 又は 超楕円曲面 のいずれか。後者の場合、次の可換図式が成り立つ。

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "g"'] & & C \\ & T \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

ここで、$g : X \longrightarrow T$ は 高々、商特異点のみを持つ正規曲面 T 上の Seifert 楕円ファイバー空間、$h : T \longrightarrow C$ は $\mathbb{P}^1$ or elliptic fiber空間 かつ $\varphi := h \circ g$ の一般ファイバーは超楕円曲面。
f は上の図式を保ち、T (resp. C) の end (resp. 自己同型) を引き起こす。更に X の適当な有限 étale covering $\hat{X}$ は、$\kappa(\hat{T})=1$ なる非特異代数曲面 $\hat{T}$ と楕円曲線 E との直積に同型。

Case 3) $\kappa(X)=0$ の場合 X の適当な有限エタール covering $\hat{X}$ は Abelian 3-fold 又は 非特異曲面 $\hat{T}$ (Abel曲面 or K3曲面と birational) と楕円曲線 E との直積に同型。
更に後者の場合、X は $\hat{T}$ の有限群 G による商空間 $\hat{T}/G$ の上の Seifert 楕円ファイバー空間になり、f はそれと両立して、底空間 $\hat{T}/G$ の同型を引きおこす。

注 Case 1) と 3) において、end $f : X \longrightarrow X$ は $\hat{X}$ 上の end $\hat{f} : \hat{X} \longrightarrow \hat{X}$ に持ち上がり、$\hat{X} \simeq \hat{T} \times E$ の時には、

$\hat{f}$ は第1成分への射影 $\hat{X}=\hat{T}\times E\longrightarrow\hat{T}$ と可換であり，
$\hat{T}$ の同型を引きおこす。

§1　次に証明のアイデアの outline を述べる。
S が $\kappa(S)\geq 0$ なる非特異代数曲面で、non-trivial surjective end $f: S\longrightarrow S$ を持つならば，S は自動的に極小となる。実際，S 上に (-1) 曲線 e が在れば，S 上の有限エタール covering の ∞ 上昇列 $S\xleftarrow{f}S\xleftarrow{f}S\xleftarrow{f}\cdots$ により e の逆像を逐次取る事で，S 上に disjoint な ∞ 個の (-1)-曲線が存在し，$\rho(S)=\infty$ となって矛盾する。

しかし，非自明な surjective end $f: X\longrightarrow X$ を持つ $\kappa(X)\geq 0$ なる非特異3次元代数多様体 X は必ずしも極小でない。自明な例として，$X=\hat{S}\times E$ (但し $\hat{S}$ は $\kappa\geq 0$ なる non-minimal な曲面，E は elliptic curve)，この時，X は非自明な end

$$\varphi: X:=\hat{S}\times E \longrightarrow X, \quad (x,[\zeta])\longmapsto(x,[m\zeta]), \quad m\geq 2$$

を持つ。では，K_X が not nef の時，森理論 [M] における5通りの extremal divisorial contraction で起こり得る可能性を調べ上げる事が問題となる。結論として，$\overline{NE}(X)$ の任意の extremal ray R は type (E_1) かつ，R に associate した収縮写像 $\mathrm{Cont}_R: X\longrightarrow X'$ は，

non-singular projective 3-fold X' の上の非特異楕円曲線を中心とする blowing-up(の逆)となる。
これは以下の事実より従がう。

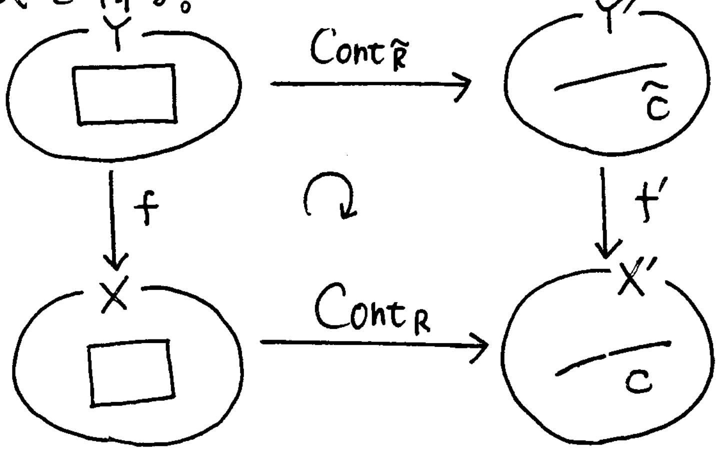
命題1　$f: Y \longrightarrow X$ を smooth projective n-fold の間の finite, étale covering で、$\rho(X) = \rho(Y)$ (Picard 数は等しい)と仮定する。すると、$f^*: N_1(X) \xrightarrow{\sim} N_1(Y)$

$$
f_*: \begin{array}{ccc} N_1(Y) & \xrightarrow{\sim} & N_1(X) \\ \cup & & \cup \\ \overline{NE}(Y) & \xrightarrow{\sim} & \overline{NE}(X) \end{array}
\qquad , \qquad
\begin{array}{ccc} N_1(X) & \xrightarrow{\sim} & N_1(Y) \\ \cup & & \cup \\ \overline{NE}(X) & \xrightarrow{\sim} & \overline{NE}(Y) \end{array}
$$

つまり、f^* と f_* により、X と Y の Kleiman-Mori Cone は1対1に対応する。更に、K_X が not nef ($\leftrightarrow K_Y \sim f^*K_X$ が not nef) と仮定すると、同型 f^* と f_* により、{$\overline{NE}(X)$ の extremal rays} と {$\overline{NE}(Y)$ の extremal rays} とは1対1に対応する。

命題2　X, Y を $\kappa(X) = \kappa(Y) \geq 0$, $\rho(X) = \rho(Y)$ なる smooth projective 3-fold, $f: Y \longrightarrow X$ を同型でない finite étale covering とする。もし、K_X が not nef ($\leftrightarrow K_Y \sim f^*K_X$ が not nef) ならば、$\overline{NE}(X)$ (resp. $\overline{NE}(Y)$) の任意の extremal ray R (resp. $\hat{R}$) は type (E_1) i.e. 収縮写像 $\mathrm{Cont}_R: X \longrightarrow X'$ (resp. $\mathrm{Cont}_{\hat{R}}: Y \longrightarrow Y'$) は、

non-singular projective 3-fold X' (resp. Y') 上の smooth curve C (resp. $\widehat{C}$) を中心とするblowing-upの逆。$C \not\cong \mathbb{P}^1$, $\widehat{C} \not\cong \mathbb{P}^1$ であり、もし $f^*R = \widehat{R}$ ならば、下の可換図式を得る。



但し、$f' : Y' \longrightarrow X'$ も同型でないfinite étale coveringで、

✡ $f'^{-1}(C) = \widehat{C}$ (既約!) を満たす。

注 これらは、錐定理 (Cone Theorem) と Mori [M] による extremal rayの分類結果からの直接の帰結である。

命題1には他にも応用がある。一例として、

命題3 有理楕円曲面 ($\mathbb{P}^2$の9点blowing-up) S, Tの間に surjective morphism $f : S \longrightarrow T$ が在れば、fは同型写像となる。特に、有理楕円曲面は非自明な surjective end を持ち得ない。

さて、元の設定に戻る。non-trivial surjective end $f: X \longrightarrow X$ を持つ、$\kappa(X) \geq 0$ なる non-sing projective 3-fold X に対して、もし K_X が not nef で有れば、endomorphism を込みにしたMMPを適用する。$\overline{NE}(X)$ の extremal rays は全て type(E_1) 故、有限個しか存在しない。又、命題1より f_* は、これらの間の置換を引きおこすので、必要が有れば、f を f の適当な iteration map $f^{(p)} := f \circ \cdots \circ f$ (p回合成) で置き換える事により、f_* は $\{$extremal rays on $\overline{NE}(X)\}$ に恒等的に作用するとしてよい。命題2より、任意の extremal ray R に対して、次を得る。

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\mathrm{Cont}_R"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & X_1 \arrow[d, "f_1"] \\ X \arrow[r, "\mathrm{Cont}_R"] & X_1 \end{tikzcd}$$

$f_1: X_1 \longrightarrow X_1$ は再び非自明な surjective end、$\rho(X_1) = \rho(X) - 1$

K_{X_1} が not nef であれば、f_1 (及びf)を適当な iteration map で置きかえて、再び同様の作業をくり返す。すると、$\rho(X) > \rho(X_1) > \cdots$ より、この作業は有限 n 回で stop して、X の極小モデル X_n を得る。extremal ray が全て type(E_1) という特殊条件のお蔭で、MMPが smooth 3-fold のカテゴリー内で機能し、flip等の困難も起こらず、話が簡単になる。結局、次の可換図式を得る。

$$
\begin{array}{ccccccc}
X & \longrightarrow & X_1 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & X_m \\
{\scriptstyle f}\big\downarrow & & {\scriptstyle f_1}\big\downarrow & & & & {\scriptstyle f_m}\big\downarrow \\
X & \longrightarrow & X_1 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & X_m
\end{array}
$$

但し、縦の太線↓は smooth projective 3-fold の上の non-trivial surjective end，横線 $X_{i-1} \longrightarrow X_i$ は X_i 上の楕円曲線 E_i を中心とするblowing-up（の逆）。
X の極小モデル X_m 上の非自明な end $f_m : X_m \to X_m$ を $f : X \longrightarrow X$ の <u>minimal reduction</u> と呼ぶ。

これより先は2段階に別れる。

<u>Step1</u>（minimal reduction $f_m : X_m \longrightarrow X_m$ の分類）
宮岡・川又による3次元Abundance定理より、K_{X_m} は semi-ample。よって X_m のIitaka filration
$\Phi := \Phi_{|mK_{X_m}|} : X_m \longrightarrow \Phi(X_m) \subset \mathbb{P}^{\dim|mK_{X_m}|}$ の構造を $\kappa(X_m)$ に応じて個別に解析する。
$\kappa(X_m) = 2$ では中山による standard fibration theorem [N1, 2]，$\kappa(X_m) = 1$ では藤木[F]の relative generic quotient theorem，$\kappa(X_m) = 0$ では．Bogomolov分解定理を用いる。すると、主定理と同様の結果を得る。

Step2 (elliptic curveを中心とするblowing-up process)
Step1で得たminimal reduction X_mを、elliptic curveに沿って、blow-upしていく。この際、blowing-upの中心となるべき各X_i上のelliptic curve E_iには命題2の☆より、$f_i^{-1}(E_i)=E_i$（既約!）という非常に強い制限条件がつく。

注 ① Step1の証明で、X_mにflopを施して、双有理同値類の中でモデルを取りかえる為、endomorphismに、こだわるのは得策でナイ。むしろ、同型でない有限エタールcovering $f:Y\longrightarrow X$において、Source Yとtarget Xとがflopで結ばれている様な状況にまでカテゴリーを広げておく方が有効である。実際、この弱い仮定の下でも同様の結果を得る。

② Questionは、$m=3$, $\kappa(X)=1$, Xはminimalで、Iitaka fibrationの一般ファイバーがsimpleなAbel曲面の場合には肯定的である。(Kollar の Shafarevich Mapsの論法より従がう。)

文献

[M] S. Mori. Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective. Annals of Math. 116 (1982), 133 – 176.

[N 1] N. Nakayama. Local structure of an elliptic fibration. preprint (1991)

[N 2] N. Nakayama. Projective threefolds whose universal coverings are $\mathbb{C}^3$. (to appear)

[F] A. Fujiki. On the structure of Compact Complex Manifolds in $\mathcal{C}$. Advanced Studies in Pure Math. 1, (1983), 231 – 302

[S-F] E. Sato & Y. Fujimoto. On smooth Projective Threefolds with non-trivial Surjective Endomorphisms. Proc. Japan Acad., 74, SerA (1998), 143 – 145

謝辞

最初は Minimal reduction の構成で．有限エタール covering の tower を用いた方法を採用していましたが，end の iteration をとる事で tower が不用となり．議論が簡略化できる事を．森先生が指摘されました。又．中山さんには．最後の注②で Kollar の Shafarevich map の論法を教えて頂きました。この場をお借りして．お二人に感謝致します。